L'utilisation du tableur a permis à ces deux élèves de conjecturer l'existence de sous-suites convergentes, sans bien sûr en apporter la preuve, et de comprendre ce que représentaient les bifurcations.

Simultanément, le groupe essayait de concevoir des expériences qui fassent apparaître le chaos de façon « sensible » : les élèves souhaitaient utiliser un effet sonore et un effet visuel. Le problème est qu'ils étaient tellement focalisés sur la sensibilité aux variations infimes des conditions initiales, qu'ils n'ont pas pris en compte qu'il fallait aussi une amplification exponentielle des écarts initiaux pour que le système soit chaotique… et, pris par leur enthousiasme, je suis passé également à côté. Les deux expériences élaborées ne donnaient donc pas des systèmes chaotiques et il a fallu attendre la rencontre avec François pour que nous comprenions pourquoi ils ne l'étaient pas. Cependant, c'est en faisant des erreurs qu'on apprend et celles-ci ont fait faire un grand pas au groupe. Je vais donc les décrire succinctement.

Pour l'effet sonore, ils ont imaginé lâcher une bille en acier dans une sorte d'escalier musical dans lequel chaque marche était conçue comme un xylophone lisse. Suivant l'endroit de la marche où la bille tombait, le son produit n'était pas le même. Alexis s'est chargé de ce « bricolage » d'une dizaine de marches qui s'est avéré en fait assez compliqué à réaliser. En lâchant la bille dans des conditions qui semblaient toujours les mêmes (rampe de lancement fixe par rapport à l'escalier et point fixe sur la rampe) celle-ci produisait une petite « musique ». Et, effectivement, les musiques étaient différentes. Nous avions cru avoir gagné, mais en renouvelant un grand nombre de fois l'expérience, nous avions l'impression que chaque musique était presqu'uniquement fonction du premier son produit, donc que le mouvement était totalement déterminé à l'issue du premier impact. C'était joli mais, tout compte fait, ne nous permettait pas de conclure grand-chose.

L'expérience mettant en avant l'effet visuel était l'observation de la trajectoire d'une balle de ping-pong lancée, toujours dans des conditions qui semblaient « identiques », depuis une rampe inclinée.

Le travail avec François Sauvageot :

Cette expérience était en cours de réalisation quand François nous a rejoints le 4 février pour la première rencontre. Après une brève étude des forces mises en œuvre il nous a convaincu qu'après avoir quitté la rampe de lancement, la déviation de la balle par rapport au plan vertical contenant la rampe serait une fonction linéaire du temps (en tout cas sur la petite dizaine de rebonds que nous pouvions observer). Il m'a cependant paru intéressant de mener cette expérience jusqu'au bout pour essayer de valider, par des mesures, ce que nous donnait cette étude des forces. Nous avons donc utilisé les moyens de l'option cinéma pour filmer la balle de façon à pouvoir observer cette déviation et avons effectivement retrouvé le résultat attendu.

Le fait d'avoir mené à son terme cette expérience a été intéressant à plus d'un titre. Tout d'abord, cela a permis de ne pas mettre à la trappe le travail des élèves. Ensuite, mais non de moindre importance, cela leur a permis de comprendre ce que n'était pas le chaos.

La première rencontre avec François n'a donc pas été qu'une prise de contact, mais contact il y a eu, et ce n'est rien de le dire. Les élèves, très impressionnés de rencontrer un mathématicien étaient plus dans une écoute admirative que dans un réel questionnement mais, en même temps ne souhaitaient pas que cette rencontre prenne fin. Les 55 minutes habituelles de club se sont transformées en deux bonnes heures et demi et seuls les élèves dont les parents étaient indisponibles pour venir les chercher sont partis avant pour ne pas manquer le dernier car.

Outre donc la mise au point sur l'expérience de la balle, il leur présenta son métier, comment il le concevait, ce que les mathématiques pouvait apporter à la réflexion dans divers domaines, les liens entre leur sujet et l'ADN, etc. La liste est longue et je les observais, captivés, rêvant déjà, pour certains, d'atteindre un jour son niveau de maîtrise et de réflexion. Je crois qu'ils s'imaginaient voir arriver un « monstre savant », un technicien inaccessible, voire incompréhensible, et ils avaient devant eux un homme, certes brillant, mais tenant un discours à leur portée et véhiculant des valeurs humaines qu'ils n'auraient jamais imaginé en lien avec les mathématiques. Le charme fonctionnait.

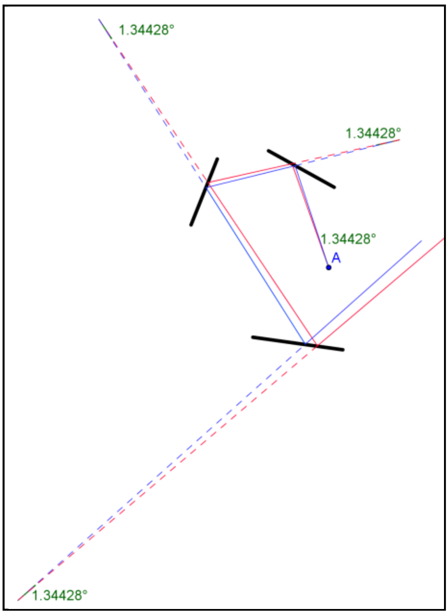
J'en profite pour dire aux professeurs qui auraient peur de se retrouver dans une position inconfortable, ne trouvant pas leur place entre un chercheur et les élèves, qu'ils n'en est rien et, qu'au contraire, ce partenariat est riche et sécurisant. Si François s'est décarcassé pour transposer le sujet abordé dans un champ didactique accessible aux élèves, ne vous inquiétez pas, il en a fait de même pour le professeur.

Pour terminer cette première rencontre, il leur proposa de réfléchir au trajet d'une boule de billard dans une série de choc avec des boules fixées sur le tapis. On en reparlerait à la rencontre suivante et bien sûr on restait en contact via le blog et les mails.

La semaine suivante, Manon se ruait aux portes ouvertes de la faculté des sciences de Nantes et allait visiter le département mathématique…

Et lors du forum régional de « Faites de la science », c'est l'ensemble du groupe qui a visité les locaux et en particulier le bureau de François et la bibliothèque du département de mathématiques. Très impressionné au passage de la quantité de publications en anglais …

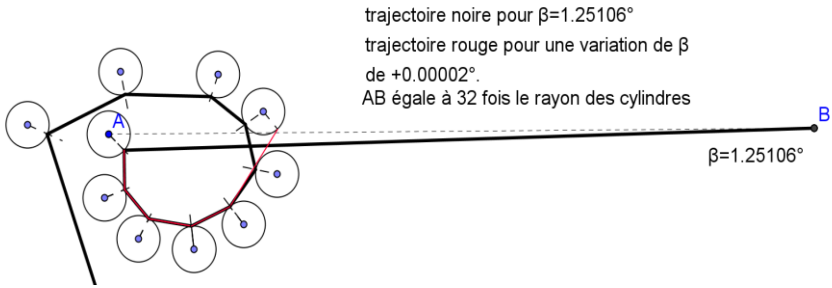
Les séances suivantes les élèves ont commencé à essayer de réaliser l'expérience proposée par François. Au début, ils n'avaient pas pris en compte le fait que seule une boule était mobile et n'arrivaient à rien d'observable, les trajectoires étant franchement différentes dès le premier choc et toutes s'entrechoquant plusieurs fois. Puis, ils ont voulu simplifier le problème en remplaçant les boules fixes par des kaplas (petits pavés de bois). Mais la perte d'énergie à chaque choc était telle que la boule s'arrêtait trop vite pour pouvoir observer quoi que ce soit. Ne baissant pas les bras, ils se sont dit qu'ils allaient modéliser le problème sur un logiciel de géométrie dynamique (Geogebra) en remplaçant la boule par un point. Il était aisé de constater et de démontrer qu'il n'y avait pas d'amplification des variations des



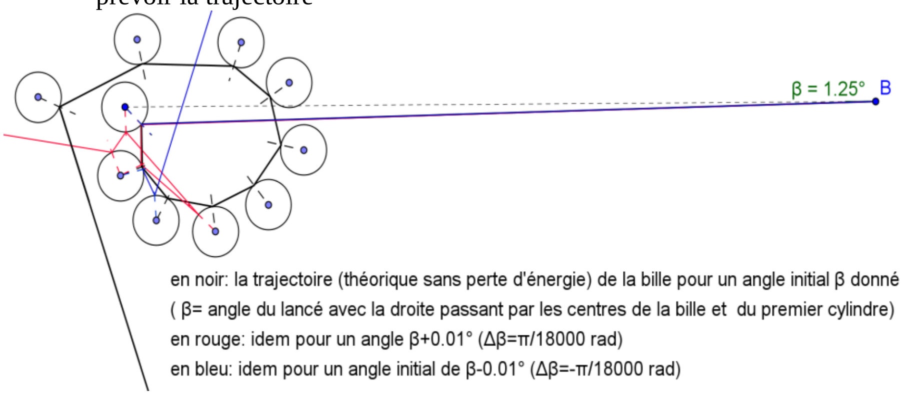
conditions initiales, donc comme pour la balle de ping-pong et l'escalier, pas de chaos.

Ils remplacèrent donc les kaplas par des boules. Mais là encore, il était difficile d'observer quelque chose qui permette de convaincre quelqu'un que la situation était (ou non) chaotique. D'une part la boule lancée allait trop vite et ne laissait pas de trace, d'autre part sa trajectoire semblait tout simplement due au hasard puisque la deuxième boule frappée n'était presque jamais la même. Prenant alors conscience que la précision de leurs conditions initiales de lancement devait être très insuffisante, ils ont réutilisé le même logiciel de géométrie dynamique pour modéliser la situation en supprimant les inconvénients dus à la vitesse et à l'absence de trace de la trajectoire et en gérant les variations des conditions initiales. Ils ont également remplacé la boule lancée par un point et les boules fixes par des cylindres car cela leur paraissait suffisant dans un premier temps pour observer ce qu'il se passait. Si cela ne donnait encore pas du chaos, on verrait… (en fait à l'issue des calculs faits avec François à la rencontre suivante pour évaluer l'ordre de grandeur de la variation de l'erreur à chaque choc, la boule est définitivement restée un point !). Ils ont alors constaté deux choses importantes qui leur permettaient de conjecturer une situation chaotique :

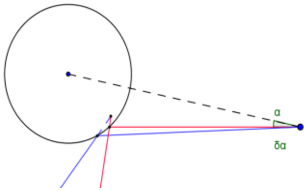
- Tout d'abord qu'une variation infime de l'angle de lancé provoquait des variations rapidement visible de la trajectoire (au cinquième choc pour les conditions initiales choisies).



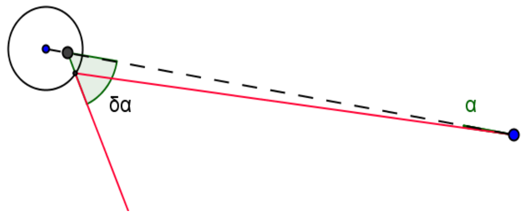
- Ensuite que les variations s'amplifiaient à chaque choc, se traduisant par des trajectoires complètement différentes, et qu'une approximation, même très précise, des conditions initiales se traduisait très vite par l'impossibilité de prévoir la trajectoire



Un groupe essaya alors d'exprimer la variation de l'angle après le premier choc (par rapport à une trajectoire donnée) en fonction de la variation d'angle au départ. Mais les calculs n'étaient pas simples et on se cassait encore les dents dessus lors de la deuxième visite de François. La complexité de nos calculs venait du fait que nous partions de la situation initiale suivante :



alors qu'il suffisait de partir de la suivante :



et on aurait alors pu conjecturer que δα était proche de $2\,\frac{d}{r}\,\alpha$ avec *d* la distance de la bille au cylindre et *r* le rayon du cylindre

Le calcul fait au tableau par François, avec des approximations pour α au voisinage de zéro, n'en resta pas beaucoup moins nébuleux pour les élèves, mais ils comprirent une chose très importante, c'est que les prévisions devenaient vite impossibles quelque soit la précision du premier lancé, puisque δα sortirait vite du voisinage de zéro et que le calcul deviendrait caduque.

C'est vraiment grâce à cette expérience qu'ils ont mis du sens sur l'expression « chaos déterministe » : Pour un angle donné (mathématiquement) la trajectoire était totalement déterminée, mais pour un angle donné dans un intervalle de rayon même très proche de zéro, la prédiction de la trajectoire était impossible après quelques chocs. Comme la météo donnée avec un indice de fiabilité de plus en plus faible au fur et à mesure que l'on prévoit à un, deux, … cinq jours, et aucune fiabilité au-delà.

Parallèlement à ce travail, une autre partie du groupe, menée par la détermination de Manon et de Camille, s'était emparé de la suggestion de François de fabriquer un moulin à eau. Ils avaient lu avec intérêt l'article[1] d'Etienne Ghys et de Jos Leys publié sur le site « Images des mathématiques » à propos du moulin à eau de Lorenz et cela les avait passionnés, surtout la fin qui les avait nettement intrigués.

Imaginer la maquette, rechercher le matériel pour la fabriquer dans un budget ne dépassant pas les 300€ alloués par le concours « Faites de la science » ne fut déjà pas simple, mais chacun y pris part avec ferveur et ingéniosité. Il fallut aussi trouver un moyen d'alimenter le moulin avec un débit constant, quelque soit l'endroit où on le ferait fonctionner… Des séances supplémentaires virent le jour, pendant les vacances de printemps chez Valentin, pendant le pont du 1er mai chez Cyril et plusieurs mercredis après-midi. Bref tout le groupe s'est vite engouffré dans ce projet et tous les sacrifices étaient bons pourvu que ça marche.

[1] *http://images.math.cnrs.fr/Le-moulin-a-eau-de-Lorenz.html*

Mais il ne s'agissait pas seulement de faire fonctionner le moulin, même si c'était important car convaincant lors d'une présentation et tout simplement satisfaisant compte tenu du travail effectué, il fallait aussi modéliser le problème. Le décortiquer physiquement d'abord et le transposer dans un champ accessible aux élèves.

Dans cette phase j'ai vraiment été apprenant presqu'au même titre que les élèves. Mes souvenirs de physiques étaient trop lointains d'une part, et je n'aurais jamais eu l'idée d'approcher le mouvement continu de la roue en le « discrétisant » en vingt-cinquièmes de seconde et en le traitant par des suites. J'ai donc suivi les explications de François avec beaucoup d'attention car il fallait ensuite que je puisse aider les élèves quand il serait reparti. Mais c'est revenu plus vite que prévu, d'autant que les explications étaient adaptées à des élèves de 1ère…

Il nous a donc décortiqué tout le problème :

Le mouvement de la roue donné par $I\dfrac{d\omega}{dt} = C - f\,\omega$,

avec I le moment d'inertie de la roue, dépendant lui-même de l'état des entonnoirs à chaque instant (entonnoir + eau)

avec C le couple, non constant lui aussi puisque les entonnoirs sont dans des états différents

avec ω la vitesse de rotation, donc $\omega = \dfrac{d\theta_1}{dt}$ avec θ_1 l'angle définissant la position de la roue par rapport à une position de référence (que nous avons prise pour l'entonnoir n°1 en position haute)

et avec f une constante relative aux frottements

En discrétisant le mouvement en vingt-cinquièmes de seconde ($dt = \dfrac{1}{25}$) à partir de l'instant initial, on obtient les termes de suites définies par :

- $\theta_{1,0}$= une valeur à choisir, ω_0=0, C_0=0, I_0=le moment d'inertie de la roue et des entonnoirs vides.
- $d\omega_n=\dfrac{C_{n+1}-f\omega_n}{25I_{n+1}}$; $\theta_{1,n+1}=\theta_{1,n}+\dfrac{\omega_{n+1}}{25}$; $\omega_{n+1}=\omega_n+d\omega_n$

  et $\theta_{i,n}=\theta_{1,n}+\dfrac{i\,\pi}{3}$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$

Pour déterminer C_n, il faut bien sûr déterminer la masse d'eau dans chacun des six entonnoirs fixés sur la roue (en tenant compte du fait qu'un entonnoir ne se remplit que s'il est sous le robinet et qu'il ne doit pas déborder, en tenant aussi compte du débit des fuites, fonction de la masse d'eau dans l'entonnoir et de la forme de celui-ci). Bref un petit casse tête que je laisse le soin à François de rapporter car la façon dont il a adapté le calcul aux connaissances des élèves est remarquable.

Au final on trouve pour $1 \leqslant i \leqslant 6$

- $m_{i,n+1} = m_{i,n} + \dfrac{\mu}{25} - \dfrac{a}{25}(m_{i,n})^{1/6}$ si l'entonnoir est sous le robinet

  $m_{i,n+1} = m_{i,n} - \dfrac{a}{25}(m_{i,n})^{1/6}$ sinon